РЕШЕНИЕ. ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ.
ВАРИАНТ 1

Задание 1 № 501592

Павел Иванович купил американский автомобиль, на спидометре которого скорость измеряется в милях в час. Американская миля равна 1609м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 50 миль в час? Ответ округлите до целого числа.

Решение

Поскольку 1 миля равна 1609 м, 50 миль/ч составляют 50·1609м/ч = 80450 м/ч = 80,45 км/ч. Округляя найденную величину, получаем 80.

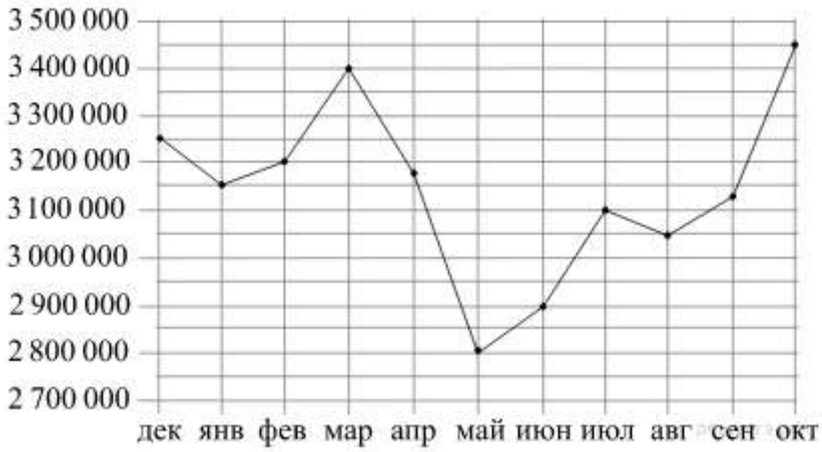
Ответ: 80.

Примечание.

Округлять следует сразу до нужного количества знаков, а не поэтапно. Поэтому 80,45 округляется до 80, а не до 81, как можно было бы подумать, сначала округлив до 80,5, а потом до 81.

Задание 2 № 525715

На рисунке точками показана месячная аудитория поискового сайта f4h0.ru во все месяцы с декабря 2008 года по октябрь 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – количество человек, посетивших сайт хотя бы раз за данный месяц. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьшую месячную аудиторию сайта f4h0.ru в период с декабря 2008 года по апрель 2009 года.



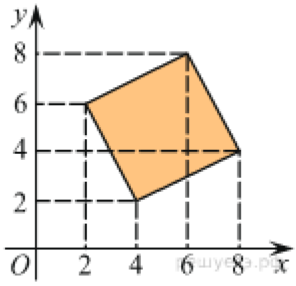
Решение

Из рисунка видно, что наименьшая месячная аудитория в период с декабря 2008 года по апрель 2009 года была равна 3 150 000 в январе.

Ответ: 3 150 000.

Задание 3 № 27701

Найдите площадь четырехугольника, вершины которого имеют координаты (4; 2), (8; 4), (6; 8), (2; 6).



Решение

Четырехугольник является квадратом. Площадь квадрата равна квадрату его стороны. Сторона квадрата равна $\sqrt{(8-4)^2+(4-2)^2}=\sqrt{20}$, тогда площадь квадрата S = 20.

Ответ: 20.

Задание 4 № 320176

Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,97. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Решение

Пусть A = «чайник прослужит больше года, но меньше двух лет», B = «чайник прослужит больше двух лет», C = «чайник прослужит ровно два года», тогда $A + B + C$ = «чайник прослужит больше года».

События A, B и C несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Вероятность события C, состоящего в том, что чайник выйдет из строя ровно через два года — строго в тот же день, час и секунду — равна нулю. Тогда:

$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C)= P(A) + P(B)$,

откуда, используя данные из условия, получаем

$0{,}97 = P(A) + 0{,}89$.

Тем самым, для искомой вероятности имеем:

$P(A) = 0{,}97 - 0{,}89 = 0{,}08$.

Ответ: 0,08.

Задание 5 № 501205

Решите уравнение: $\sqrt[3]{x+2}=-2$.

Решение

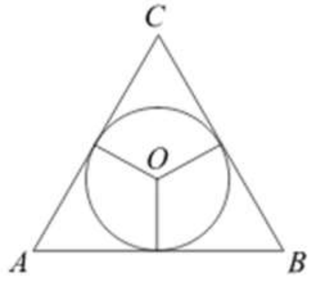
Возведем обе части уравнения в третью степень:

$\sqrt[3]{x+2}=-2 \Leftrightarrow x+2=-8 \Leftrightarrow x=-10$

Ответ: –10.

Задание 6 № 27934

Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 5, основание равно 6. Найдите радиус



вписанной окружности.

Решение

Радиус вписанной окружности равен отношению площади к полупериметру. Для нахождения площади, воспользуемся формулой Герона:

$$S_{ABC}=\sqrt{\frac{P_{ABC}}{2}\left(\frac{P_{ABC}}{2}-AB\right)\left(\frac{P_{ABC}}{2}-BC\right)\left(\frac{P_{ABC}}{2}-AC\right)}=$$

$$=\sqrt{8\cdot 3\cdot 3\cdot 2}=\sqrt{16\cdot 9}=12.$$

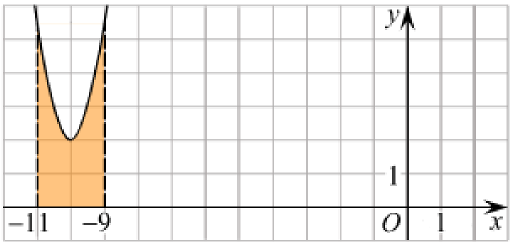
Тогда

$$r=\frac{P}{p}=\frac{12}{8}=1{,}5$$

Ответ: 1,5.

Задание 7 № 323079

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$.



Функция $F(x)=x^3+30x^2+302x-\frac{15}{8}$ – одна из первообразных функции $y = f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Решение

Площадь выделенной фигуры равна разности значений первообразных, вычисленных в точках –9 и –11.

Имеем:

$$F(-9)=(-9)^3+30\cdot(-9)^2+302\cdot(-9)-\frac{15}{9}=-729+2430-2718-\frac{15}{8}=-1018\frac{7}{8}.$$

$$F(-11)=(-11)^3+30\cdot(-11)^2+302\cdot(-11)-\frac{15}{9}=-1331+3630-3322-\frac{15}{8}=$$

$$=-1024\frac{7}{8}$$

$$F(-9)-F(-11)=-1018\frac{7}{8}+1024\frac{7}{8}=6.$$

Приведем другое решение.

Вычисления можно было бы упростить, выделив полный куб:

$$F(x)=x^3+30x^2+302x-\frac{15}{8}=(x+10)^3+2x-1000-\frac{5}{8},$$

что позволяет срезу же найти

$$F(-9)-F(-11)=(-9+10)^3+2\cdot(-9)-\left((-11+10)^3+2\cdot(-11)\right)=$$
$$=1-18-(-1-22)=6$$

Приведем ещё одно решение.

Можно было бы найти разность первообразных, используя формулы сокращенного умножения:

$$F(-9)-F(-11)=\left((-9)^3+30\cdot(-9)^2+302\cdot(-9)-\frac{15}{8}\right)-$$

$$-\left((-11)^3+30\cdot(-11)^2+302\cdot(-11)-\frac{15}{8}\right)=(-9)^3-(-11)^3-30\cdot\left((-9)^2-(-11)^2\right)+$$

$$+302\cdot((-9)-(-11))=11^3-9^3-30\left(11^2-9^2\right)+302(11-9)=(11-9)(11^2+11\cdot 9+$$

$$+9^2)-30\cdot(11-9)(11+9)+302\cdot 2=2\cdot 301-30\cdot 40+604=1206-1200=6$$

Приведем ещё одно решение.

Получим явное выражение для $f(x)$. Поскольку

$$f(x)=F'(x)=3x^2+60x+302=3(x^2+20x+100)+2=3(x+10)^2+2,$$

имеем:

$$\int_{-11}^{-9}\left(3(x+10)^2+2\right)dx=\left((x+10)^3+2x\right)\Big|_{-11}^{-9}=1-(-1)+2(-9-(-11))=2+4=6$$

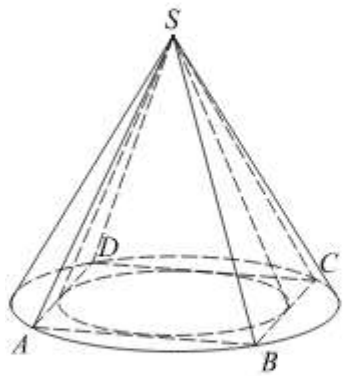
Примечание.

Этот подход можно несколько усовершенствовать. Заметим, что график функции $f(x)=3(x+10)^2+2$ получен сдвигом графика функции $y=3x^2+2$ на 10 единиц влево вдоль оси абсцисс. Поэтому искомая площадь фигуры равна площади фигуры, ограниченной графиком функции $y=3x^2+2$ и отрезком $[-1;1]$ оси абсцисс. Имеем:

$$S=\int_{-1}^{1}\left(3x^2+2\right)dx=2\int_{0}^{1}\left(3x^2+2\right)dx=2(x^3+2x)\Big|_0^1=2(1+2)-0=6$$

Ответ: 6.

Задание 8 № 27124



Во сколько раз объем конуса, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, больше объема конуса, вписанного в эту пирамиду?

Решение

Объемы данных конусов соотносятся как площади их оснований, и, следовательно, как квадраты их диаметров. Диаметр вписанного конуса равен стороне квадрата, диаметр описанного —

диагонали квадрата, длина которой равна $\sqrt{2}$ длины стороны. Поэтому объем описанного конуса в 2 раза больше объема вписанного.

Ответ: 2.

Задание 9 № 26807

Найдите $\frac{a+9b+16}{a+3b+8}$, если $\frac{a}{b}=3$.

Решение

Из условия $\frac{a}{b}=3$ находим, что $a=3b$, и подставляем в дробь:

$$\frac{a+9b+16}{a+3b+8}=\frac{3b+9b+16}{3b+3b+8}=\frac{12b+16}{6b+8}=\frac{4(3b+4)}{2(3b+4)}=2$$

Ответ: 2.

Задание 10 № 27975

В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет R_1 = 90 Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 Ом и R_2 Ом их общее сопротивление даётся формулой $R_{общ}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ (Ом), а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 9 Ом. Ответ выразите в омах.

Решение

Задача сводится к решению неравенства $R_{общ}\geq 9$ Ом при известном значении сопротивления приборов R_1 = 90 Ом:

$$R_{общ}\geq 9 \Leftrightarrow \frac{90R_2}{90+R_2}\geq 9 \Leftrightarrow 81R_2\geq 810 \Leftrightarrow R_2\geq 10\text{ Ом}$$

Ответ: 10.

Задание 11 № 99595

Два пешехода отправляются одновременно в одном направлении из одного и того же места на прогулку по аллее парка. Скорость первого на 1,5км/ч больше скорости второго. Через сколько минут расстояние между пешеходами станет равным 300 метрам?

Решение

Пусть v км/ч – скорость второго пешехода, тогда скорость первого – v + 1,5 км/ч. Пусть через t часов расстояние между пешеходами станет равным 0,3 километра. Таким образом,

$0{,}3=(v+1{,}5)t-vt \Leftrightarrow 0{,}3=1{,}5t \Leftrightarrow t=0{,}2$, $t=0{,}2$ часа или 12 минут.

Ответ: 12.

Задание 12 № 26710

Найдите точку минимума функции $y=(x+16)e^{x-16}$.

Решение

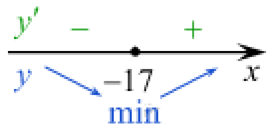
Найдем производную заданной функции:

$$y'=(x+16)'e^{x-16}+(x+16)\left(e^{x-16}\right)'=e^{x-16}+(x+16)e^{x-16}=(x+17)e^{x-16}.$$

Найдем нули производной:

$$(x+17)e^{x-16}=0 \Leftrightarrow x=-17.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума

Ответ: –17.

Задание 13 (С1) № 501215

а) Решите уравнение $1+ctg2x=\dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-2x\right)}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Критерии оценивания выполнения задания	***Баллы***
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

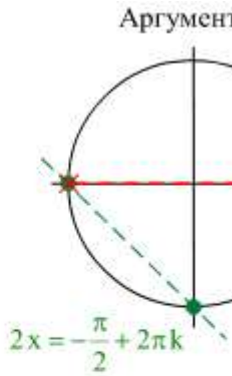
Максимальный балл	2

а) $1+ctg2x=\dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-2x\right)} \Leftrightarrow 1+\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}=-\dfrac{1}{\sin 2x} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x+\cos 2x=-1, & (1) \\ \sin 2x \neq 0. & (2) \end{cases}$

Из уравнения (1) находим:

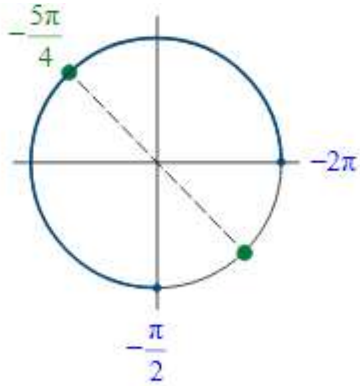
$$\sin 2x+\cos 2x=-1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x=\pi+2\pi k, & (a) \\ 2x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z. & (b) \end{array}\right.$$



Так как решение (a) не удовлетворяет условию (2), окончательно получаем $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z.$

б) Из решений, найденных в пункте а), промежутку $\left[-2\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right]$ принадлежит только одно число: $-\dfrac{5\pi}{4}$.



Ответ: а) $\left\{-\dfrac{\pi}{4}+\pi k:\ k\in Z\right\}$; б) $-\dfrac{5\pi}{4}$.

Задание 14 (С2) № 513920

В треугольной пирамиде $ABCD$ двугранные углы при ребрах AD и BC равны. $AB = BD = DC = AC = 5$.

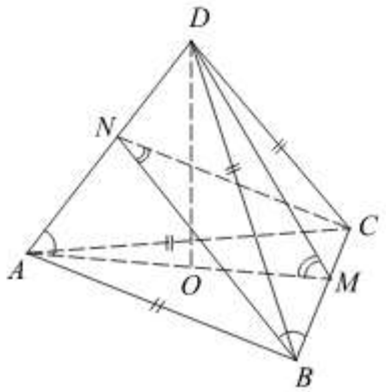
а) Докажите, что $AD = BC$.

б) Найдите объем пирамиды, если двугранные углы при AD и BC равны 60°.

Критерии оценивания выполнения задания	***Баллы***
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б)	2
Выполнен только один из пунктов а) или б)	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	**2**

*Критерии распространяются и на случай использования координатного метода.



а) Треугольник BAC – равнобедренный. Проведём $AM \perp BC$. M –середина BC, тогда $DM \perp BC$, так как треугольник BDC равнобедренный. $\angle AMD = \varphi$ – линейный угол двугранного угла при ребре BC. Аналогично $\angle BNC = \varphi$ – линейный угол двугранного угла при ребре AD. $\Delta ABC = \Delta DBC$ по трём сторонам, тогда $MA = MD$ и $\angle MAD = \dfrac{180^0 - \varphi}{2} = \alpha$

Аналогично $\Delta BAD = \Delta CAD$ и $NB = NC$, а

$\angle NBC = \dfrac{180^0 - \varphi}{2} = \alpha$.

Треугольники ANM и BMN равны по общему катету MN и острому углу α, тогда $AN = BM$. Но $AN = \dfrac{1}{2}AD$, $BM = \dfrac{1}{2}BC$, следовательно, $AD = BC$.

б) По условию $\varphi = 60°$, тогда треугольник AMD равносторонний. Пусть $AD = AM = MD = BC = a$, тогда $BM = \dfrac{a}{2}$. В треугольнике AMB имеем

$a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = 25$, откуда $a = 2\sqrt{5}$ и $AD = AM = MD = BC = 2\sqrt{5}$.

$V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} S_{ABC} \cdot DO$.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 10$.

$DO = AD \cdot \sin\alpha = 2\sqrt{5} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{15}$.

Тогда

$V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot 10 \cdot \sqrt{15} = \dfrac{10\sqrt{15}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{10\sqrt{5}}{3}$.

Задание 15 (С3) № 514625

Решите неравенство $\dfrac{27^{x+\frac{1}{3}}-10\cdot 9^x+10\cdot 3^x-5}{9^{x+\frac{1}{2}}-10\cdot 3^x+3}\le 3^x+\dfrac{1}{3^x-2}+\dfrac{1}{3^{x+1}-1}$.

Критерии оценивания выполнения задания	*Баллы*
Обоснованно получен верный ответ	2
обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 0, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	**2**

$$\frac{27^{x+\frac{1}{3}}-10\cdot 9^x+10\cdot 3^x-5}{9^{x+\frac{1}{2}}-10\cdot 3^x+3}\le 3^x+\frac{1}{3^x-2}+\frac{1}{3^{x+1}-1}$$

Пусть $t=3^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{3t^3-10t^2+10t-5}{3t^2-10t+3}\le t+\frac{1}{t-2}+\frac{1}{3t-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{t\left(3t^2-10t+3\right)}{3t^2-10t+3}+\frac{6t-2}{3t^2-10t+3}+\frac{t-3}{3t^2-10t+3}\le t+\frac{1}{t-2}+\frac{1}{3t-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t+\frac{2}{t-3}+\frac{1}{3t-1}\le t+\frac{1}{t-2}+\frac{1}{3t-1}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{t-3}\le\dfrac{1}{t-2},\\ t\ne\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{t-1}{(t-1)(t-3)}\le 0,\\ t\ne\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t<\dfrac{1}{3},\\ \dfrac{1}{3}<t\le 1,\\ 2<t<3.\end{array}\right.$$

При $t<\dfrac{1}{3}$ получим: $3^x<\dfrac{1}{3}$, откуда $x<-1$.

При $\frac{1}{3} < t \le 1$ получим: $\frac{1}{3} < 3^x \le 1$, откуда $-1 < x \le 0$.

При $2 < t < 3$ получим: $2 < 3^x < 3$, откуда $\log_3 2 < x < 1$.

Решение исходного неравенства: $x < -1$, $-1 < x \le 0$, $\log_3 2 < x < 1$.

Ответ: $(-\infty;-1)$; $(-1;0]$; $(\log_3 2;1)$.

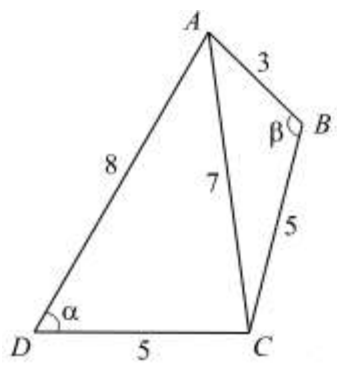
Задание 16 (С4) № 519661

В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* известны стороны и диагональ: *AB* = 3, *BC* = *CD* = 5, *AD* = 8, *AC* = 7.

а) Докажите, что вокруг этого четырёхугольника можно описать окружность.

б) Найдите *BD*.

Критерии оценивания выполнения задания	***Баллы***
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	**3**



Найдём косинусы углов *ABC* и *ADC* в треугольниках *ABC* и *ADC* соответственно:

$$\cos\angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{9+25-49}{2\cdot3\cdot5} = -\frac{1}{2},$$

поэтому $\angle ABC = 120°$.

Далее,

$$\cos\angle ADC = \frac{AD^2 + DC^2 - AC^2}{2AD \cdot DC} = \frac{64 + 25 - 49}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{1}{2},$$ поэтому $\angle ADC = 60°$.

Тем самым, сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°, поэтому вокруг него можно описать окружность.

Для вписанного четырёхугольника справедлива теорема Птолемея: произведение диагоналей четырёхугольника равно сумме произведений его противоположных сторон. Тогда $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$, то есть $7\,BD =$ $= 3 \cdot 5 + 8 \cdot 5$, откуда $BD = \frac{55}{7} = 7\frac{6}{7}$.

Ответ: б) $7\frac{6}{7}$.

Приведем решение пункта б) без использования теоремы Птолемея.

Заметим, что $\cos\angle BAD = -\cos\angle BCD$, поскольку $\angle BAD + \angle BCD = 180^0$. Пусть $\gamma = \angle BAD$.

В треугольнике BAD по теореме косинусов

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2 \cdot AD \cdot AB \cdot \cos\gamma = 64 + 9 - 49\cos\gamma.$$

В треугольнике BCD по теореме косинусов

$$BD^2 = CD^2 + CB^2 + 2 \cdot CD \cdot CB \cdot \cos\gamma = 25 + 25 + 50\cos\gamma$$

Приравнивая выражения для BD^2, получим

$$73 - 48\cos\gamma = 50 + 50\cos\gamma \Leftrightarrow \cos\gamma = \frac{23}{98}.$$

Тогда $BD = \sqrt{50 + 50 \cdot \frac{23}{98}} = \sqrt{\frac{50(98+23)}{98}} = \frac{55}{7} = 7\frac{6}{7}$.

Ответ: б) $7\frac{6}{7}$.

Задание 17 (С5) № 514450

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – целое число;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

Критерии оценивания выполнения задания	***Баллы***
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: – неверный ответ из-за вычислительной ошибки; – верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	**3**

Пусть повышающий коэффициент $1+\frac{r}{100}=k$.

В соответствии с этим обозначением и условием задачи заполним таблицу:

Месяц	Долг на 1-е число, млн. руб	Выплата, млн. руб	Долг на 15-е число, млн. руб
Январь			1
Февраль	k	$k-0{,}6$	0,6
Март	$0{,}6k$	$0{,}6k-0{,}4$	0,4
Апрель	$0{,}4k$	$0{,}4k-0{,}3$	0,3
Май	$0{,}3k$	$0{,}3k-0{,}2$	0,2
Июнь	$0{,}2k$	$0{,}2k-0{,}1$	0,1
Июль	$0{,}1k$	$0{,}1k$	0

Найдём общую сумму выплат, сложив ежемесячные выплаты:

$(k - 0{,}6) + (0{,}6k - 0{,}4) + (0{,}4k - 0{,}3) + (0{,}3k - 0{,}2) + (0{,}2k - 0{,}1) + 0{,}1k =$
$= k\,(1 + 0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1) - (0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1) = 2{,}6k - 1{,}6$

По условию:

$$2{,}6k - 1{,}6 < 1{,}2 \Leftrightarrow 2{,}6k < 2{,}8 \Leftrightarrow k < \frac{14}{13}$$

Значит,

$$1 + \frac{r}{100} < \frac{14}{13} \Leftrightarrow \frac{r}{100} < \frac{1}{13} \Leftrightarrow r < \frac{100}{13} \Leftrightarrow r < 7\frac{9}{13}.$$

Откуда наибольшее целое значение

Тем самым, ежемесячно остаток долга возрастал на 7%.

Ответ: $r = 7$.

Задание 18 (C6) № 505453

Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\left(\log_8(x+a) - \log_8(x-a)\right)^2 - 12a\left(\log_8(x+a) - \log_8(x-a)\right) + 35a^2 - 6a - 9 = 0$$

имеет ровно два решения.

Критерии оценивания выполнения задания	***Баллы***
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a = -\frac{3}{7}$ и/или $a = \frac{3}{5}$.	3
С помощью верного рассуждения получен один из промежутков множества значений a: $\left(-\infty; -\frac{3}{7}\right)$ или $\left(\frac{3}{5}; +\infty\right)$; возможно, с включением граничных точек и/или исключением точки $a = -3$.	2
Верно найдена хотя бы одна из граничных точек множества a: $a = -\frac{3}{7}$ или $a = \frac{3}{5}$. ИЛИ Получено хотя бы одно из уравнений $\log_8(x+a) - \log_8(x-a) = 5a - 3$ или $\log_8(x+a) - \log_8(x-a) = 7a + 3$.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Максимальный балл	**4**

Пусть $t=\log_8(x+a)-\log_8(x-a)$, тогда, используя теорему, обратную теореме Виета, получим:

$$t^2-12at+35a^2-6a-9=0 \Leftrightarrow t^2-((5a-3)+(7a+3))t+(5a-3)(7a+3)=0 \Leftrightarrow$$

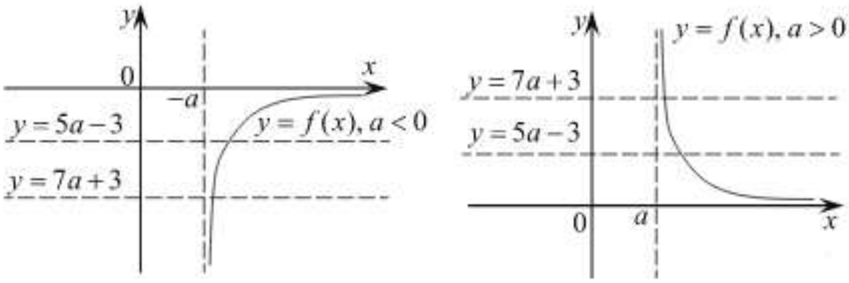
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=5a-3, \\ t=7a+3. \end{array}\right.$$

Значит, исходное уравнение имеет два различных корня тогда и только тогда, когда график функции $f(x)=\log_8(x+a)-\log_8(x-a)$ имеет с горизонтальными прямыми $y=5a-3$ и $y=7a+3$ ровно две общие точки. Эти прямые совпадают, если $a=-3$.

При $a=0$ уравнение не имеет решений. Если $a>0$, то при $x>a$, а если $a<0$, то при $x>-a$, имеем:

$$f(x)=\log_8(x+a)-\log_8(x-a)=\log_8\left(\frac{x+a}{x-a}\right)=\log_8\left(1+\frac{2a}{x-a}\right).$$

При неограниченном увеличении x значения функции стремятся к нулю, причём, для $a<0$ функция f является возрастающей, а при $a>0$ – убывающей. Эскизы графиков изображены на рисунке.



Тем самым, при $a>0$, должны быть выполнены неравенства $5a-3>0$, $7a+3>0$, откуда $a>\frac{3}{5}$, при $a<0$, должны быть выполнены неравенства $5a-3<0$, $7a+3<0$, откуда $a<-\frac{3}{7}$.

Ответ: $(-\infty;-3)\cup\left(-3;-\frac{3}{7}\right)\cup\left(\frac{3}{5};+\infty\right)$.

Приведём авторское решение.

Пусть $t=\log_8(x+a)-\log_8(x-a)$, тогда получим:

$$t^2-12at+35a^2-6a-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=5a-3, \\ t=7a+3. \end{array}\right.$$

Значит, решение исходного уравнения – это решение уравнений $\log_8(x+a)-\log_8(x-a)=5a-3$ или $\log_8(x+a)-\log_8(x-a)=7a+3$.

Исследуем сколько решений имеет уравнение $\log_8(x+a)-\log_8(x-a)=b$ в зависимости от a и b. При $a\neq 0$ и $x>a$, и $x>-a$, то есть при $x>|a|$, левая часть определена и принимает вид $\log_8\left(\frac{x+a}{x-a}\right)=\log_8\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)$.

При $x>|a|$ выражение $1+\frac{2a}{x-a}$ принимает по одному все значения из промежутка $(1;+\infty)$ для $a>0$ и принимает по одному разу все значения из промежутка (0; 1) для $a<0$. Значит, при $x>|a|$ выражение $\log_8\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)$ принимает по одному разу все значения промежутка $(0;+\infty)$ при $a>0$ и принимает по одному разу все значения из промежутка $(-\infty;0)$ при $a<0$. Таким образом, уравнение $\log_8(x+a)-\log_8(x-a)=b$ имеет одно решение при $ab>0$ и не имеет решений при $a\neq 0$ и $ab\leq 0$. При $a=0$ и $x>0$ уравнение принимает вид $0=b$ и либо имеет бесконечно много решений, либо не имеет решений.

Уравнение

$\log_8(x+a)-\log_8(x-a)=5a-3$ и $\log_8(x+a)-\log_8(x-a)=7a+3$ могут иметь общие решения при $5a-3=7a+3$, то есть при $a=-3$. При $a=-3$ оба уравнения принимают вид $\log_8(x-3)-\log_8(x+3)=-18$ и имеют одно решение.

При других значениях a исходное уравнение имеет два решения, если оба уравнения $\log_8(x+a)-\log_8(x-a)=5a-3$ и $\log_8(x+a)-\log_8(x-a)=$ $=7a+3$ имеют по одному решению. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases}(5a-3)a>0,\\(7a+3)a>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a<-\frac{3}{7},\\a>\frac{3}{5}.\end{array}\right.$$

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два решения при a принадлежащем множеству $(-\infty;-3)\cup\left(-3;-\frac{3}{7}\right)\cup\left(\frac{3}{5};+\infty\right)$.

Задание 19 (С7) № 501734

а) Чему равно число способов записать число 1292 в виде $1292=a_3\cdot 10^3+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0$, где числа a_i – целые, $0\leq a_i\leq 99$, $i=$ $=0; 1; 2; 3$?

б) Существуют ли 10 различных чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i – целые, $0 \le a_i \le 99$, i = = 0; 1; 2; 3 равно 130 способами?

в) Сколько существует чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i – целые, $0 \le a_i \le 99$, i = = 0; 1; 2; 3 равно 130 способами?

Критерии оценивания выполнения задания	***Баллы***
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение п. а; – обоснованное решение п. б; – обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. е; – оба набора задуманных чисел в п. в	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	**4**

Каждое число $0 \le a_i \le 99$ однозначно представляется в виде $a_i = 10b_i + c_i$, где $0 \le b_i \le 9$ и $0 \le c_i \le 9$ (i = 0; 1; 2; 3). Значит, для каждого представления некоторого числа N в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$ имеет место единственное представление N в виде $N = 10n + m$, где $n = b_3 \cdot 10^3 + b_2 \cdot 10^2 + b_1 \cdot 10 + b_0$ и $m = c_3 \cdot 10^3 + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10 + c_0$ – произвольные целые числа от 0 до 9999. Число способов записать число N в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$ равно числу способов записать число N в виде $N = 10n + m$.

а) Для представления числа 1292 в виде $1292 = 10n + m$ в качестве n можно взять любое целое число от 0 до 129. При этом $m = 1292 - 10n$ определено однозначно. Таким образом, искомое число способов равно 130.

б) Повторяя рассуждения предыдущего пункта, несложно показать, что каждое из чисел от 1290 до 1299 представимо в требуемом виде ровно 130 способами.

в) Рассмотрим представление некоторого числа N в виде $N = 10n + m$, где n и m – некоторые целые числа от 0 до 9999. Представим m в виде $m = 10k + l$, где l – цифра единиц числа m, а k – некоторое целое число от 0 до 999. Тогда выполнено:

$$N = 10n + 10k + l \Leftrightarrow N - l = 10(n + k) \Leftrightarrow \frac{N - l}{10} = n + k .$$

Найдём все числа K, представимые ровно 130 способами в виде $K = n + k$, где n – некоторое целое число от 0 до 9999, а k - некоторое целое число от 0 до 999.

Пусть для некоторого числа K представления $K = n_1 + k_1$ и $K = n_2 + k_2$ таковы, что n_1 – наименьшее возможное n, а n_2 – наибольшее возможное n. Тогда $n_1 = 0$ или $k_1 = K - n_1 = 999$, иначе бы было представление $K = (n_1 - 1) + (k_1 + 1)$. Аналогично, $n_2 = 9999$ или $k_2 = K - n_2 = 0$.

Заметим, что для любого целого n_0 такого, что $n_1 < n_0 < n_2$, имеется представление $K = n_0 + k_0$, поскольку $0 \le n_1 < n_2 \le 9999$, $0 \le k_2 < k_0 < k_1 \le 999$. Таким образом, количество представлений равно n_2 – – $n_1 + 1$. Если $n_1 = 0$; $n_2 = 9999$ или $k_1 = 999$, $k_2 = 0$, то представлений больше. Значит, или $n_1 = 0$; $n_2 = 129$; $K = 129$; $N = 1290 + l$, или $n_2 = 9999$; $n_1 = 9870$; $k_1 = 999$, $K = 10869$; $N = 108690 + l$, где l – произвольная цифра. Таким образом, искомое количество чисел равно 20.

Ответ: а) 130; б) да; в) 20.